Leren en onderwijzen van redeneren met formules in bovenbouw voortgezet onderwijs in wiskunde- en natuurkundelessen

Harrie Eijkelhof, FI/UU

Peter Kop, ICLON/UL

WND

13 December 2025

Inhoud workshop

- Doel en aanpak
- Literatuur
- Aan de slag
- Discussie

Uit: syllabus natuurkunde VWO (2025)

Subdomein A12-A15

interpreteren en produceren, waaronder formuletaal;

betekenis van de symbolen aangeven

onderscheid maken tussen afhankelijke en onafhankelijke variabelen, parameters en constanten

mathematische uitdrukkingen in verband brengen met relaties tussen fysische begrippen

controleren van eenheden

in formules

- de invloed van veranderingen van variabelen op elkaar aangeven
- eventuele natuurkundige beperkingen bespreken
- bekende wiskundige patronen, zoals vermeld in specificatie A12.2, herkennen (toepassen van $\log(x)$, $\ln(x)$, e^{ax}, a^x , x^a , $\sin(x)$ en $\cos(x)$)

verschillen en overeenkomsten herkennen in wiskundige vergelijkingen en natuurwetenschappelijke formules

Ons project: Hoe dat doen in lessen (wi en na)?

Doel:

- Samenhang wis- en natuurkunde onderwijs bevorderen
- Succesvolle aanpakken (leerlijn) om redeneren met formules in VO te bevorderen
- Uitgangspunt: gegeven aparte wi en na lessen

Wat gedaan:

- Identificeren probleem en Interviews eerstejaars wiskunde docenten HO
- Literatuurstudie
- Workshops WND, NWD, Studiedag NVvW
- Interactieve aanpak (steeds feedback ophalen)

Stand van zaken

Grote verschillen tussen wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie m.b.t. omgang met formules (zie o.a. syllabi)

Recent onderzoek onder dertig universitaire docenten van bèta-opleidingen (https://www.nvvw.nl/wp-content/uploads/2024/06/verslag-interviews-HO-docenten-2024.pdf)

Aankomende studenten:

- zien formules vaak louter als rekentuig en niet als beschrijving van relaties tussen variabelen
- hebben moeite met het interpreteren van formules, zowel in wiskundige als in natuurwetenschappelijke context
- suggestie van docenten: besteed meer aandacht aan doorzien van structuur van formules, globale verloop van grafieken en kenmerken van functies

Opvallende verschillen

a. In natuurkunde formules *variabelen een specifieke betekenis* in reële context; bij wiskunde veel contextloze opgaven. Bijv. VWO wB 2024-I Gegeven $f_a(x) = \frac{ax^2-2}{x^2+a}$

b. *Notaties*: bij natuurkunde grootheden aanduiden met vakspecifieke letters; bij wiskunde hebben de letters vaak geen vaste betekenis maar vrij ad hoc toegekend, bijv. V kan verwijzen naar snelheid, lengteverschil en vloeroppervlak.

c. *Eenheden*: bij natuurkunde hebben on- en afhankelijke variabelen, parameters en constanten bijpassende eenheden; bij toegepaste wiskunde hebben variabelen eenheden maar parameters en constanten meestal niet.

Zie bijv. VWO wB 2024-I: $F = \frac{Rd^2}{V}\left(1 + \frac{4d}{V}\right)$ met F de benodigde kracht (in kN/m), R een *constante* die afhangt van het soort metaal, d de dikte van het metaal (in mm), V de breedte van de opening van de matrijs (in mm).

d. Formules die gebaseerd zijn op fysisch onderzoek kennen *randvoorwaarden* waarbinnen de formule geldig is; bij wiskunde is hiervoor nauwelijks aandacht.

e. Formules bij natuurkunde omvatten vaak *meer dan twee variabelen* en de experimentele situatie bepaalt wat de afhankelijke en onafhankelijke variabelen zijn; bij wiskunde is het aantal onafhankelijke variabelen vaak beperkt.

f. Bij natuurkunde zijn formules van *verschillende aard*: definitie, experimenteel verband, wet, model.

g. Bij natuurkunde *beperkt aantal typen formules* (veel evenredigheden); bij wiskunde generalisaties in functie-families en meer complexere samenstellingen.

h. Bij natuurkunde: meer gebruik van *speciale typen symbolen* (Δ, indices, Griekse letters).

Literatuur

- Wiskunde in wiskunde is niet wiskunde in natuurkunde
- Interpreteren formules
- Symbolic forms en Grundvorstellungen
- Bevragen formules

Wiskunde = Wiskunde maar Math in Math $\neq$ Math in Science

Formules vanuit wiskundig en natuurkundig perspectief (Redish & Kuo, 2015)
voorbeeld: $v_t = v_0 + at$

vanuit wiskundig oogpunt

- lineair verband
- v_t bereken je via a keer t plus v_0
- t is onafhankelijke variabele en v_t de afhankelijke variabele
- v_0 is snijpunt met y-as en a de helling (beide constant)
- grafiek rechte lijn

vanuit natuurkundig oogpunt

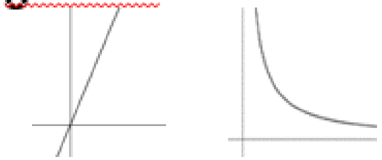
- een beweging met constante versnelling; dus snelheid neemt gelijkmatig toe
- versnelling positief dan snelheid groter, versnelling negatief dan v kleiner
- basis + verandering (basis v_0 en versnelling geeft de verandering van snelheid per sec)
- eenheden in formule interpreteren en controleren

Beide perspectieven van belang en samenbrengen.

Interpreteren van formules bij natuurkunde (contexten): “je begrijpt pas een formule als je het in eigen woorden kunt vertellen”
(Geyer/Kuske-Janssen, 2019)

Natuurwetenschappen

wiskunde

<table>
<tr><td colspan="2">I **Formule** $\rho = \frac{m}{V}$</td></tr>
<tr><td>IIA **Woord formule**:
$dichtheid\ \rho = \frac{massa\ m}{volume\ V}$</td><td>IIB **Herkennen structuur**:
Vorm:
$y = a \cdot x$ en $y = \frac{a}{x}$</td></tr>
<tr><td>III **Specifieke nw taal**:
Dichtheid is massa gedeeld door volume</td><td>IIIB **Covariatie functies; globale grafiek**
</td></tr>
<tr><td colspan="2">IV **Contextualisatie (informatie toevoegen)**:
Stof heeft dichtheid, massa per volume-eenheid, eenheid gram per cm^3, dichtheid evenredig met massa en omgekeerd evenredig met volume</td></tr>
<tr><td colspan="2">V **Concept image**: ρ is eigenschap stof; massa wordt verdeeld over volume; massa en volume zijn evenredig; zwaardere stoffen hebben grotere dichtheid, van belang bij drijven</td></tr>
</table>

Formules linken aan context:
Sherin (2001): *symbolic forms* zijn symbolische templates om fysisch idee te beschrijven
Bijv. base + change met template [.... $\pm\Delta$], in $h = aT + b$ or $v(t) = v(0) + at$;
parts of a whole' […+…+…]; ‘dying away' [$e^{-x\cdots}$]

Meyer & Marohn (2024): *Grundvorstellung* is een fundamenteel idea van concept beschreven met representaties en alledaagse taal
E.g. de GV $\rho = \frac{m}{V}$:
ρ is breuk of deling (m door V);‘massa verdeeld over volume'; ‘massa per volume-eenheid';
ρ eigenschap stof; ‘verhouding massa en volume'; ‘massa is evenredig met volume';
evenredigheidsconstante (V keer ρ geeft m)

Formule bevragen (Romer, 1993)

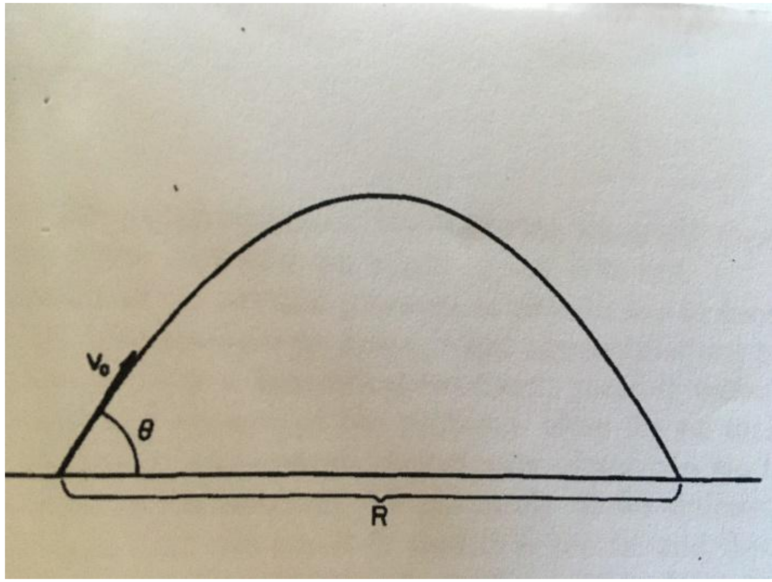
Als een kogel door een kanon afgeschoten wordt, kun je in een versimpeld model de baan van de kogel beschrijven met de onderstaande formule:

$$R = \frac{2v_0^2 sin(\Theta) cos(\Theta)}{g}$$

Hierin is:

- R het horizontale bereik van de kogel in m,
- Θ de hoek waaronder de kogel afgeschoten wordt in radialen,
- v_0 de beginsnelheid van de kogel in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ en
- g de zwaartekrachtsversnelling in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Welke vragen zouden leerlingen zich moeten stellen?



Overgenomen uit Romer (1993).

a. Wat is betekenis van gebruikte symbolen; welke grootheden vertegenwoordigen ze?
b. Wat is aard van formule? (definitie, experimenteel, wet)
c. Hoe verandert afhankelijke variabele als een van de onafhankelijke variabelen groter of kleiner wordt? Wat gebeurt er in grensgevallen?
d. Welke benaderingen en/of idealiseringen worden gemaakt? Wat zijn randvoorwaarden?
e. Kloppen de eenheden in de formule?

CSE (havo wiB, 2019-1)

Geluidssnelheid in zeewater benaderd met de formule van Wilson:

$v = 1449{,}2 + 4{,}623T - 0{,}0546T^2 + 1{,}391\,(Z-35) + D/60$,

met v geluidssnelheid in m/s; T watertemperatuur in ºC; Z het zoutgehalte van zeewater in ‰; D waterdiepte in m.

Originele vragen:

Dode Zee met 337‰ en Kaspische Zee met zoutgehalte van 12‰

a. Bereken bij gelijke watertemperatuur (T) en gelijke waterdiepte (D) het verschil tussen de geluidssnelheid in de Dode Zee en in de Kaspische Zee.

Watertemperatuur is onafhankelijk van de waterdiepte en het zoutgehalte. Daarom Z en D als constanten beschouwen.

b. Bereken algebraïsch de temperatuur in graden Celsius waarbij de geluidssnelheid in zeewater maximaal is.

Een onderzeeboot en een object bevinden zich op 20 meter diepte in zeewater van 10 ºC met een zoutgehalte van 35‰. De onderzeeboot zendt een geluidssignaal uit, dat door het object wordt teruggekaatst, en weer wordt opgevangen na 12,45 sec.

c. Bereken hoe ver het object van de onderzeeboot verwijderd is.

Bevragen van formule

Geluidssnelheid in zeewater benaderd met de formule van Wilson:

$v = 1449{,}2 + 4{,}623T - 0{,}0546T^2 + 1{,}391\,(Z-35) + D/60$,

met v geluidssnelheid in m/s; T watertemperatuur in ºC; Z het zoutgehalte van zeewater in ‰; D waterdiepte in m.

Interpretatievragen

a. Waar staat 1449,2 voor in de formule? En wat is de eenheid van 60? (na, wi)

De geluidssnelheid in zeewater is afhankelijk van een aantal factoren.

b. Beschrijf de invloed van elk van deze factoren op de geluidsnelheid m.b.v. globale grafieken? (na, wi)

c. Verklaar vanuit natuurwetenschappen deze afhankelijkheden (na)

d. Wat zijn randvoorwaarden bij deze formule? (na)

De formule van Wilson kan ook geschreven worden in de vorm

$v = -\,0{,}0546(T-\ldots)^2 + \ldots. + 1{,}391(Z-35) + 1/60 \cdot D$

e. Doe dat en zeg wat je in deze vorm beter kunt aflezen? (wi)

f. Waarom kun je je onderwater minder oriënteren op de richting waar het geluid vandaan komt? (na)

Ontwerpprincipes voor lesmateriaal

- Besteed aandacht aan interpreteren van formules en betekenis geven aan formule
- Gebruik gemeenschappelijk leermateriaal voor zowel wiskunde als natuurkunde les
- Besteed aandacht aan bevragen van formules (welk verhaal vertellen formules?)
- Besteed aandacht aan structuur van formule, zowel wiskundig (opbouw vanuit basisfuncties) als fysisch (symbolic forms)
- Besteed aandacht aan redeneren met formules met o.a. functioneel denken en redeneren over covariatie, link formule-grafiek, grensgevallen, en benaderingen
- Besteed aandacht aan het herkennen en ordenen van formules, zowel vanuit wiskundig als vanuit fysisch perspectief
- Besteed aandacht aan de (cultuur)verschillen tussen beide vakken; oa gebruik van vaste letters voor variabelen, verschillende typen formules (definitie, principes, experimenteel verband), randvoorwaarden bij gebruik formules, basisformules bij bijv. exponentiele functies en sinusfuncties, eenheden bij variabelen en ook bij parameters, constanten

Nieuwe opdrachten

Bespreek opdrachten in groepjes

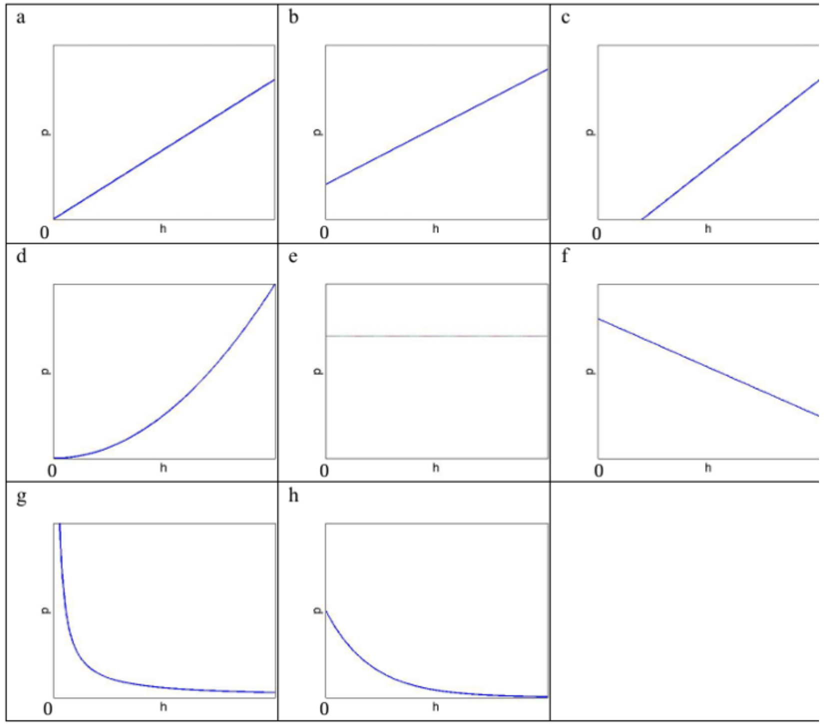
Noteer per soort opdracht (A tm E)

- Bruikbaar in wiskunde- en/of natuurkundeles?
- Wat is moeilijk hierbij? Wat is haalbaar?
- Andere opmerkingen?

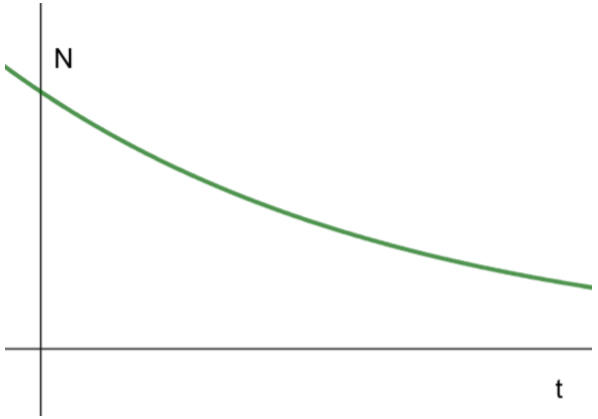
A: Link tussen formules en grafieken in wiskunde en natuurkunde lessen

1. In een container die gevuld is met water wordt op verschillende diepten h (in meter) de totale druk p gemeten. Deze bestaat uit twee componenten, de hydrostatistische druk en de druk van de atmosfeer. Het verband tussen de totale druk en de diepte wordt beschreven met de formule $p = p_0 + \rho g h$, waarbij p_0, ρ, g positieve parameters met positieve waarden.

Welke grafiek geeft het verband tussen de totale druk en de diepte? Geef toelichting. Verklaar dit verband natuurkundig.



2. Bij radioactief verval neemt het aantal deeltjes N in de tijd af volgens de grafiek hieronder.



Welke formule kan hierbij passen? λ en N_0 parameters met positieve waarden
Wat stellen λ en N_0 in deze context voor?

a. $N = N_0 \cdot e^{-\frac{\lambda}{t}}$

b. $N = N_0 \cdot \lambda t$

c. $N = \frac{N_0}{t}$

d. $N = \frac{N_0}{\lambda} \cdot t$

e. $N = N_0 \cdot e^{\lambda t}$

f. $N = N_0 \cdot t$

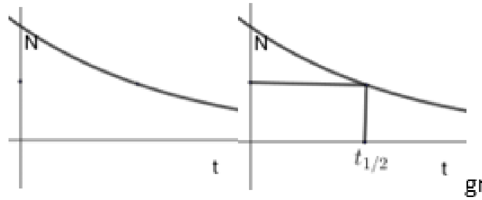
g. $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

B. Concept image maken bij (bekende) formule

Hier zie je een voorbeeld van een mogelijk concept image bij de exponentiele functie $N(t) = N(0) \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{t_{\frac{1}{2}}}}$, die de afname van het aantal deeltjes beschrijft. Je ziet zowel wiskundige als natuurkundige kenniselementen.

Variabelen:
Aantal deeltjes N(t), en t de tijd
Halveringstijd $t_{1/2}$
N(0) begin aantal deeltjes

$$N(t) = N(0) \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{t_{\frac{1}{2}}}}$$



grafiek

Veranderingsgedrag:
Straling die afneemt
Afnemende daling dus bij veel straling grote afname
bij weinig straling weinig afname

Kenmerken:
Vaste groeifactor
Vaste halverings/verdubbelingstijd
Omzetten groeifactor ↔ groeipercentage,
verdubbelings/

Afnemende daling dus bij veel straling grote
afname bij weinig straling weinig afname
Verandering evenredig met aanwezige
hoeveelheid

Formules: $y = b \cdot g^x$,
met b beginwaarde en g groeifactor en $y = 10^{ax+b}$
Equivalent met $\log(y) = ax + b$
$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ en afleiding $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

Verandering evenredig met aanwezige hoeveelheid
$\frac{dN}{dt} = -c \cdot N$ of $A(t) = -c \cdot N$
Oplossing van differentiaalvergelijking dy/dt=c.y

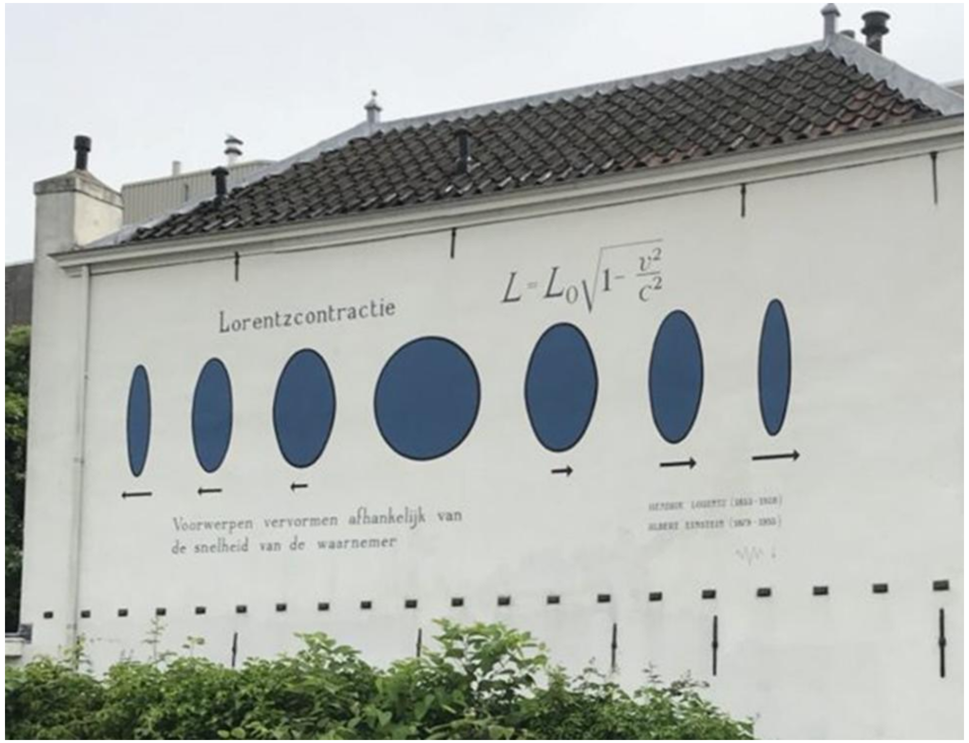
Maak zelf een concept image bij:

1. Rendement van moto $\eta = E_{nuttig}/E_{in}$
2. Geluidsterkte $L_{dB} = 10 \cdot \log\frac{I}{I_0}$
3. Dichtheid $\rho = m/V$
4. Gravitatiekracht $F_g = GmM/r^2$

C. Wat vertelt formule, na korte intro, over context?

Vb 1. Lorentzcontractie $L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, L lengte bewegend voorwerp, L_0 lengte stilstaand voorwerp, v snelheid van bewegend voorwerp, c lichtsnelheid. Wat vertelt deze formule over de lengte van een bewegend voorwerp?

Vb 2. Vermogen van schaatser Schulting $P = f_d mgv + \frac{1}{2}c_W A\rho v^3$ met P het vermogen dat zij moet leveren om een constante snelheid van v te schaatsen. Deze formule bevat twee termen, een over wrijving en een over luchtweerstand. Wat vertelt deze formule over de rol van de snelheid in beide termen?



D. Bevragen van onbekende formules

1. Gravitatiekracht $F_g = m \cdot g \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}$, met m massa voorwerp, R de straal planeet, h hoogte boven oppervlak van planeet.

a. Beredeneer of F toe of afneemt als h groter wordt? Verklaar.

b. Wat is de betekenis van $\frac{R^2}{(R+h)^2}$? En wat zijn de eenheden hiervan?

c. Leg uit waarom deze formule benaderd kan worden met F=mg?

E. Categoriseren van natuurkundige formules op basis van wiskundige structuur of op basis van natuurkundige context

a. Categoriseer onderstaande natuurkundige formules naar wiskundige basis-functies: evenredig, lineair, kwadratisch, omgekeerd evenredig, a/x^2, wortel, logaritme, e-macht, dalende e-macht, exponentieel, machtsfunctie, sinus. Geef ook bij iedere categorie een prototypische standaardformule (bijv. y=ax bij evenredig)

b. Categoriseer dezelfde formules maar nu naar natuurkundige context: geef aan welke formules bij min of meer dezelfde context horen. Beschrijf ook deze context.

$$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}; N = N_0 e^{\lambda t}; N = b \cdot g^x; E_f = \frac{hc}{\lambda}; F_L = Bqv; P = Fv; P = \frac{E}{t}; \lambda_{max} T = k_w; I = \frac{P_{bron}}{4\pi R^2};$$

$$P = \sigma A T^4; \rho = m/V; s_t = \tfrac{1}{2} a t^2; E_v = \frac{1}{2} C u^2; E_k = \frac{1}{2} m v^2; A = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} N; \rho = \frac{RA}{l}; v_{max} = \frac{2\pi A}{T}; I = \frac{U}{R};$$

$$F_g = \frac{GmM}{r^2}; F_{el} = f\frac{qQ}{r^2}; T = \frac{mv^2}{r}; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; l = (2n-1)\frac{1}{4}\lambda$$

Bespreking

Bruikbaar in wis/natuurkundeles?

Wat is moeilijk hierbij?

Wat is haalbaar?

Andere opmerkingen?

Ontwerpprincipes?

Besteed aandacht aan

- interpreteren van formules en betekenis geven
- gemeenschappelijk leermateriaal voor wi en na
- bevragen van formules (verhaal formules?)
- structuur van formule (opbouw vanuit basisfuncties en symbolic forms
- redeneren met formules (functioneel denken, covariatie, link formule-grafiek, grensgevallen, en benaderingen)
- herkennen en ordenen van formules (wi en na)
- (cultuur)verschillen

Samenvattend:

Syllabus 2025 →workshop

Interpreteren

Betekenis geven

Soorten variabelen

Relatie formule en fysische en wiskundige context

Eenheden-analyse

Covariatie

Randvoorwaarden

Basisfuncties gebruiken

Verschillen wi-na

Verder meedenken over deze problematiek?

Bedank voor jullie aandacht en meedenken

koppmgm@iclon.leidenuniv.nl
of H.M.C.Eijkelhof@uu.nl

Uit: syllabus natuurkunde VWO Subdomein A12-A15 (2025): Hoe in de lessen?

De kandidaat kan:

1 gebruik maken van beredeneerde schattingen voor onbekende grootheden bij het oplossen van natuurkundige vraagstukken;

2 met behulp van formules zoals vermeld bij de vakinhoudelijke subdomeinen of gegeven in het examen:

- berekeningen uitvoeren met bekende grootheden en daarbij de juiste formules en eenheden hanteren, inclusief het omrekenen, afleiden en controleren van eenheden en het herleiden tot SI- grondeenheden;
- vooraf de orde van grootte van een grootheid of uitkomst inschatten en achteraf beoordelen in hoeverre de uitkomst van een vraagstuk juist kan zijn;
- van een grafiek op basis van de grootheden op de assen de helling en de oppervlakte onder de grafiek interpreteren als een natuurkundige grootheid;

3 in formules zoals vermeld bij de vakinhoudelijke subdomeinen of gegeven in het examen:

- de invloed van veranderingen van variabelen op elkaar aangeven;
- eventuele natuurkundige beperkingen bespreken die voor de toepasbaarheid van de formule gelden;
- bekende wiskundige patronen, zoals vermeld in specificatie A12.2, herkennen;

4 verschillen en overeenkomsten herkennen in wiskundige vergelijkingen en natuurwetenschappelijke formules (structuur, aantal onafhankelijke variabelen, gebruik van eenheden, parameters en constanten uitdrukken in getallen);

5 een formule herschrijven naar een andere afhankelijke variabele.

Set vragen voor bevragen van formules:

Aard van de formule

- soort formule: definitie, fundamentele wet, experimenteel of theoretisch bepaald?
- Randvoorwaarden voor de geldigheid van de formule?

Type formule

- Welke grootheden spelen een rol?
- Welke grootheden mis je in de formule?
- Benoem de afhankelijke en onafhankelijke grootheden met hun eenheden
- Welke constanten en parameters spelen een rol? Wat zijn hun eenheden?
- Kloppen de dimensies van de termen van de formule?

Manipuleren van de formule:

- Hoe verandert de formule als afhankelijke en onafhankelijke variabelen worden verwisseld?
- Wat betekent dat voor een grafiek?
- Limietgevallen: wat zegt de formule wanneer onafhankelijke grootheden zeer groot of zeer klein worden gemaakt?

Literatuur

Geyer, M. A., & Kuske-Janßen, W. (2019). Mathematical representations in physics lessons. *Mathematics in physics education*, 75-102.

Kop, P. & Eijkelhof, H. (2024). *Wiskundige formules in natuurwetenschappen en wiskunde. NVOX, april 2024* p.11-13.

Kop, P. (2023, July). Supporting the interpretation of formulas in physics education through mathematics lessons. In *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (No. 7). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME.

Meyer, P., & Marohn, A. (2024). Mathematical Grundvorstellungen in Chemistry Education: An Approach to Understanding Chemical Mathematics Using the Example of the Concept of Density. *Journal of Chemical Education*, *101*(11), 4904-4915.

Palmgren, E., & Rasa, T. (2024). Modelling Roles of Mathematics in Physics: Perspectives for Physics Education. *Science & Education*, *33*(2), 365-382.

Pospiech, G. (2023). An Educational Perspective on the Connections Between Physics and Mathematics. In *Physics Teacher Education: More About What Matters* (pp. 39-53). Cham: Springer Nature Switzerland.

Redish, E. F. (2021). Using math in physics: Overview. *The Physics Teacher*, *59*(5), 314-318.

Redish, E. F., & Kuo, E. (2015). Language of physics, language of math: Disciplinary culture and dynamic epistemology. *Science & Education*, *24*, 561-590.

Romer, R. H. (1993). Reading the equations and confronting the phenomena-The delights and dilemmas of physics teaching. *American Journal of Physics*, *61*(2), 128-142.

Sherin, B. L. (2001). How students understand physics equations. *Cognition and instruction*, *19*(4), 479-541.

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., & Pospiech, G. (2012). Modelling mathematical reasoning in physics education. *Science & Education*, *21*, 485-506.